Clase 11

Potencial Eléctrico

Fuerza y campo eléctrico

El campo eléctrico presente en una determinada región del espacio actúa sobre la materia cargada en esa región modificando su comportamiento dinámico. Una partícula de masa m y carga q en un campo eléctrico siente una fuerza proporcional a su carga. La 2a ley de Newton establece que

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}} \quad , \quad m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = q\vec{\mathbf{E}} \quad .$$

La trayectoria la partícula dependerá de la particular configuración del campo eléctrico y de las condiciones iniciales del movimiento.

Ejemplo 24: Trayectoria de una partícula que ingresa a una región con un campo eléctrico uniforme con velocidad perpendicular al mismo..

Escogemos el sistema de coordenadas de forma que el campo apunte en la dirección del eje xy, $\vec{\mathbf{E}} = E\hat{\mathbf{y}}$ y que en el instante inicial la partícula está en el origen moviéndose con velocidad $\vec{\mathbf{v}}(t)v_0\hat{\mathbf{x}}$. Ecuación de Newton tomada en componentes dice,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = qE$$

La solución con las condiciones iniciales indicadas es

$$x = v_0 t \quad , \quad y = \frac{qE}{2m}t^2 \quad .$$

Si eliminamos el tiempo podemos escribir la ecuación intrínseca de la trayectoria en la forma

$$y = \frac{qE}{2mv_0^2}x^2 \quad .$$

Energía cinética y potencial

Variación de la energía cinética

Dada una partícula de masa a m, la energía cinética se define como $E_c = \frac{1}{2m}v^2 = \frac{1}{2m}(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}.\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt})$. Si sobre la partícula actua una fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}_T(\vec{\mathbf{r}})$ el trabajo de las fuerzas sobre la partícula se define por la integral de linea

$$W_T = \int_C \vec{\mathbf{F}}_T(\vec{\mathbf{r}}).\vec{\mathbf{dl}}$$

donde C es el camino seguido por la partícula entre el punto inicial $\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}(t_i)$ y el punto final $\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}(t_f)$. Entonces, por la 2a ley de Newton llegamos al teorema de la variación de la energía cinética,

$$\begin{aligned} W_T &= m\int_C \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}.\vec{\mathbf{dl}} = m\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}.\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)dt \\ &= \frac{m}{2}\int_{t_i}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}.\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)dt = E_c\Big|_{t_i}^{t_f} = E_c(t_f) - E_c(t_i) \end{aligned}$$

La variación de la energía cinética entre los dos puntos es igual al trabajo total realizado por las fuerzas.

Fuerzas conservativas y energía potencial

Especial atención merecen las fuerzas para las cuales el trabajo realizado al moverse de $\vec{\mathbf{r}}_i$ y $\vec{\mathbf{r}}_f$ depende solo de los puntos inicial y final pero no de la trayectoria seguida. Para estas fuerzas llamadas conservativas se cumple también que el trabajo realizado sobre cualquier trayectoria cerrada se anula. Esto se ve escogiendo dos puntos A y B sobre la trayectoria y dividiendo la trayectoria en dos subtrayectorias entre esos puntos. Como el trabajo en las dos subtrayectorias cuando se recorren de A a B es igual, por las propiedades de la integral de línea, el trabajo realizado cuando se va de B a A por una de ellas es el negativo del trabajo realizado al ir de A a B por la otra. Al recorrer ambas subtrayectorias y completar el circuito el trabajo se anula.

Estas propiedades de las fuerzas conservativas permiten definir una cantidad asociada a ellas que llamamos energía potencial. Dada una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}_C$

$$U(\vec{\mathbf{r}}_f) - U(\vec{\mathbf{r}}_i) = -\int_C \vec{\mathbf{F}}_C.\vec{\mathbf{dl}}.$$

donde C es cualquier camino que vaya de $\vec{\mathbf{r}}_i$ y $\vec{\mathbf{r}}_f$. Para una partícula sometida solo a una fuerza conservativa por el teorema de la variación de la energía cinética se cumple

$$U(\vec{\mathbf{r}}_f)-U(\vec{\mathbf{r}}_i) = -(E_c(t_f)-E_c(t_i)) \implies E_c(t_f)+U(\vec{\mathbf{r}}_f) = E_c(t_i)+U(\vec{\mathbf{r}}_i)$$

Este es el teorema de conservación de la energía mecánica.

Energía potencial de una partícula en un campo eléctrico

Vamos a ver ahora que la fuerza que ejerce un campo eléctrico sobre una partícula es conservativa. Para ello veremos primero que la fuerza que ejerce una partícula de carga q sobre una partícula de prueba q_0 es conservativa. Después usaremos el principio de superposición para generalizar el resultado a una distribución de carga arbitraria.

Energía potencial de una partícula en el campo debido a una carga puntual

Consideremos una carga puntual q ubicada en el origen de un sistema de coordenadas. El campo eléctrico que ella produce es

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Consideremos ahora dos puntos $\vec{\mathbf{r}}_A$ y $\vec{\mathbf{r}}_B$ y consideremos el trabajo que realiza el campo eléctrico cuando una carga q_0 se desplaza entre esos dos puntos. Sin pérdida de generalidad supongamos $r_A < r_B$. Escojamos primero el camino que partiendo de A siga en la misma dirección de $\vec{\mathbf{r}}_A$ hasta estar a la distancia r_B del origen y luego sigue por el arco de circunferencia de radio r_B que une ese punto con $\vec{\mathbf{r}}_B$. En la trayectoria por el arco de circunferencia el campo eléctrico de la carga no realiza trabajo pues es perpendicular a la trayectoria. En el otro pedazo, $\vec{\mathbf{dl}} = \hat{\mathbf{r}}dr$. El trabajo total realizado por el campo eléctrico de la carga es

$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right).(\hat{\mathbf{r}}dr) = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

Para darnos cuenta que el trabajo no depende del camino escogido basta observar que cualquier camino entre A y B puede aproximarse tanto como uno quiera por un camino formado de segmentos radiales y arcos de circunferencia. El trabajo en los arcos de circunferencia es nulo y el trabajo en los segmentos radiales se va sumando para producir el mismo resultado de arriba.

Resulta conveniente tomar el punto de referencia A con $r_A \to \infty$ y en ese caso la energía potencial asociada a la fuerza conservativa producida por la carga puntual q sobre la carga de prueba q_0 en la posición $\vec{\mathbf{r}}$

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = -q_0 \int_{-\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dl}} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \quad .$$

Cuando la carga q no está en el origen sino en la posición $\vec{\mathbf{r}}_q$ los argumentos se generalizan directamente y tendremos,

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = -q_0 \int_{-\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dl}} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_q|} \quad .$$

Potencial Eéctrico

Energía potencial de una partícula en un campo eléctrico

Energía potencial de una partícula en el campo debido a una distribución de cargas

Cuando tenemos que el campo eléctrico es producido por una distribución de cargas y no solo por una única carga el principio de superposición nos indica que siendo el campo la superposición de los campos producidos por cada carga el trabajo realizado por ese campo sera la suma de las contribuciones correspondientes a cada carga. Por lo tanto siempre que la distribución de carga no se extienda hasta infinito la energía potencial se podrá escribir como una superposición de términos debidos a las diferentes cargas.

Para el campo producido por un conjunto de cargas $q_1, q_2, \ldots q_n$ colocadas en las posiciones $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \ldots \vec{\mathbf{r}}_n$ la energía potencial de la carga de prueba q_0 en la posición $\vec{\mathbf{r}}$ será,

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_i|} \quad .$$

Para una distribución volumétrica,

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Omega}\frac{\rho(\vec{\mathbf{r}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}dV \quad .$$

Para una distribución superficial,

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{S}\frac{\sigma(\vec{\mathbf{r}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}dS \quad .$$

Para una distribución lineal,

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{\mathbf{r}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} dl \quad .$$

El potencial eléctrico

En las expresiones anteriores vemos que la energía potencial es proporcional a la carga de la la partícula de prueba. Conviene definir una nueva cantidad que llamamos el potencial eléctrico y que es la energía potencial por unidad de carga,

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{U(\vec{\mathbf{r}})}{q_0} = -\int_{\infty}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}).\vec{\mathbf{dl}} \ .$$

Por la definición observamos que una partícula cargada positivamente tenderá a moverse hacia la zona de menor potencial mientras que una partícula cargada negativamente lo hará hacia las zonas de mayor potencial.

Cuando la distribución de cargas no se extiende hasta el infinito y podemos fijar el cero de energía potencial y correspondientemente el cero de potencial en infinito, tendremos:

Cargas $q_1, q_2, \ldots q_n$ colocadas en las posiciones $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \ldots \vec{\mathbf{r}}_n$

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_i|} \quad .$$

Distribución volumétrica,

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Omega \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} dV \quad .$$

Distribución superficial,

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{\mathbf{r}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} dS \quad .$$

Distribución lineal,

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{\mathbf{r}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} dl \quad .$$

Cálculo del Potencial eléctrico

Según hemos visto el potencial eléctrico puede ser calculado de su definición cuando conocemos el campo eléctrico o a partir de la directamente de la distribución de cargas usando las expresiones deducidas arriba. Veamos algunos ejemplos de ambos procedimientos.

Calculo del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico

Ejemplo 25: Potencial eléctrico sobre una placa cargada

Consideremos una placa infinitas cargada con densidades $+\sigma$. Queremos calcular el potencial encima de la placa.

Tomamos el sistema de referencia de forma que la placa esté en el plano xy. El campo eléctrico sobre la placa según hemos visto toma el valor $(\sigma/2\epsilon_0)\hat{\mathbf{z}}$. La diferencia de potencial entre un punto sobre la placa y un punto a una altura z encima de el la podemos calcular sobre la linea recta que los une,

$$V(z) - V(0) = -\int \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dl}} = -\int_0^z (\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}).\hat{\mathbf{z}}dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z$$

El potencial en cualquier otro punto del plano paralelo a las placas a la altura z es el mismo pues el campo eléctrico es perpendicular a cualquier camino en ese plano. Resulta conveniente escoger que el valor del potencial en la placa inferior sea cero. Entonces el potencial sobre la placa es negativo y tiende a infinito para z grande. Una carga positiva colocada sobre el plano tendera a moverse hacia la zona de menor potencial, esto es hacia arriba.

Ejemplo 26: Potencial eléctrico entre dos placas cargadas

Consideremos ahora dos placas infinitas cargadas colocadas una a una distancia d de la otra con densidades $+\sigma$ y $-\sigma$. Queremos calcular el potencial entre las placas.

Tomamos el sistema de referencia de forma que la placa con carga negativa esté en el plano xy y la placa con carga positiva esté en el plano $z = d$. El campo eléctrico entre las placas toma el valor $-(\sigma/\epsilon_0)\hat{\mathbf{z}}$. La diferencia de potencial entre un punto sobre la placa inferior y un punto a una altura z encima de el la podemos calcular sobre la linea recta que los une,

$$V(z) - V(0) = -\int \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dl}} = -\int_0^z (-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}).\hat{\mathbf{z}}dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0}z$$

El potencial en cualquier otro punto del plano paralelo a las placas a la altura z es el mismo pues el campo eléctrico es perpendicular a cualquier camino en ese plano. Resulta conveniente escoger que el valor del potencial en la placa inferior sea cero. En este caso una carga postitiva claramente tenderá a acercarse a la placa de abajo